ENS-ULM 1977

MATHÉMATIQUES
Groupe C
– – – – – –
Durée : 4 heures

Un corrigé

– –

-I-

1. Remarquons d'abord que $a_n \neq 0$ puisque P est de degré n. La décomposition en facteurs irréductibles de P s'écrit $P(X) = a_n(X - x_1)(x - x_2)...(X - x_n)$. En développant et en identifiant les coefficients d'ordre $n-1$ et d'ordre 0, on obtient le résultat annoncé.

2. (a) Les cinq racines de l'équation polynomiale $z^5 - 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$ sont les racines cinquième de l'unité à savoir : $1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}} = e^{\frac{-4i\pi}{5}}, e^{\frac{8i\pi}{5}} = e^{\frac{-2i\pi}{5}}$.

(b) $z^5 - 1 = (z-1)Q(z)$ où $Q(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$.

(c) i. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
Q(z) &= z^2\left(z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) && (1)\\
&= z^2\left(z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1\right) && (2)\\
&= z^2\left[\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 + z + \frac{1}{z} + 1\right] && (3)\\
&= z^2\left[\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1\right] && (4)
\end{aligned}$$

Comme 0 n'est une racine de Q, il vient :

$$\begin{aligned}
Q(z) = 0 &\Leftrightarrow u = z + \frac{1}{z} \text{ et } u^2 + u - 1 = 0 && (5)\\
&\Leftrightarrow u = z + \frac{1}{z} \text{ et } u \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\} && (6)\\
&\Leftrightarrow z^2 - uz + 1 = 0 \text{ et } u \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\} && (7)\\
&\Leftrightarrow z^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0 \text{ ou } z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0 && (8)
\end{aligned}$$

On résout aisément ces deux équations du second degré. On obtient donc les quatre racines complexes de Q qui sont :

$$\frac{-1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1+\sqrt{5}-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

ii. D'après les questions précédentes on a :

$$\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right\} = \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{4}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right\}$$

et

$$\left\{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right\} = \left\{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right\}.$$

Comme $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) < 0$, alors $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.
Comme $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5}$, il vient $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) < \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, par conséquent $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{5}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5}$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

et

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

3. Considérons le polynôme de degré $n-1$ qui a pour racines $a_1, \dots, a_{n-1}$: $P(X) = \prod_{i=1}^{n-1}(X - a_i) = X^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} c_j X^j$.

Ajoutons à la dernière colonne la première multipliée par c_0, la seconde multipliée par c_1, etc. Par définition de P, ceci va annuler les éléments de la dernière colonne, sauf le dernier :

$$D(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & 0 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & 0 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-2} & 0 \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & P(a_n) \end{vmatrix}$$

Si on développe suivant la dernière colonne, $D(a_1, \dots, a_n) = P(a_n) D(a_1, \dots, a_{n-1})$. Or $P(a_n) = \prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i)$: d'où le résultat, par récurrence.

Partie II : Sommes de Gauss

1. • $G_1 = 1$,
• $G_2 = 1 + e^{i\pi} = 0$,
• $G_3 = \sum_{k=0}^{2} e^{\frac{2i\pi k^2}{3}} = 1 + e^{\frac{2i\pi}{3}} + e^{\frac{8i\pi}{3}} = 1 + 2e^{\frac{2i\pi}{3}} = 1 + 2\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = i\sqrt{3}$,
• $G_4 = 1 + e^{\frac{2i\pi}{4}} + e^{\frac{8i\pi}{4}} + e^{\frac{18i\pi}{4}} = 1 + i + 1 + e^{\frac{i\pi}{2}} = 1 + i + 1 + i = 2(1+i)$,
Soit $r \in \mathbb{Z}$ fixé. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \zeta_n^{kr} = \sum_{k=0}^{n} (\zeta_n^r)^k = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{\frac{2i\pi r}{n}}\right)^k$$

Si r est un multiple de n, $e^{\frac{2i\pi r}{n}} = 1$ et donc $\sum_{k=0}^{n} \zeta_n^{kr} = n$.

Si r ne divise pas n, alors la famille $(\zeta_n^{kr})_{0 \le k \le n-1}$ décrit l'ensemble de toutes les racines n-ièmes de l'unité et donc $\sum_{k=0}^{n} \zeta_n^{kr} = 0$.

2. • Les cinq racines de l'équation polynomiale $x^5 - 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$ sont les racines cinquième de l'unité à savoir : $1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}} = e^{\frac{-4i\pi}{5}}, e^{\frac{8i\pi}{5}} = e^{\frac{-2i\pi}{5}}$.
• $x^5 - 1 = (x-1)Q(x)$ où $Q(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$.
• Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\begin{aligned} Q(z) &= z^2\left(z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) && (9)\\ &= z^2\left(z^2 + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} + 1\right) && (10)\\ &= z^2\left[\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 + z + \frac{1}{z} + 1\right] && (11)\\ &= z^2\left[\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1\right] && (12)\end{aligned}$$

Comme 0 n'est une racine de Q, il vient :

$$\begin{aligned} Q(z) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad u = z + \frac{1}{z} \text{ et } u^2 + u - 1 = 0 && (13)\\ &\Leftrightarrow \quad u = z + \frac{1}{z} \text{ et } u \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\} && (14)\\ &\Leftrightarrow \quad z^2 - uz + 1 = 0 \text{ et } u \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\} && (15)\\ &\Leftrightarrow \quad z^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0 \text{ ou } z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}z + 1 = 0 && (16)\end{aligned}$$

On résout aisément ces deux équations du second degré. On obtient donc les quatre racines complexes de Q qui sont :

$$\frac{-1-\sqrt{5}+i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1-\sqrt{5}-i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1+\sqrt{5}+i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1+\sqrt{5}-i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

D'après les questions précédentes on a :

$$\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right\} = \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{4}, \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right\}$$

et

$$\left\{\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right), \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right\} = \left\{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \frac{-1+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right\}.$$

Comme $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) > 0$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) < 0$, alors $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.
Comme $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{2\pi}{5}$, il vient $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) < \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, par conséquent $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{5}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5}$.
Ainsi $G_5 = 1 + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}} + e^{\frac{18i\pi}{4}} + e^{\frac{32i\pi}{5}} = 1 + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{-2i\pi}{5}} + e^{\frac{-2i\pi}{4}} + e^{\frac{2i\pi}{5}} = 1 + 4\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{5}$.

3. Posons $AB = (c_{rs})_{1\le r,s\le n}$ et $BA = (d_{rs})_{1\le r,s\le n}$ avec $c_{rs} = \sum_{k=1}^{n} a_{rk}b_{ks}$ et $d_{rs} = \sum_{k=1}^{n} b_{rk}a_{ks}$. On a

$$\sum_{r=1}^{n} c_{rr} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{rk}b_{kr} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} b_{kr}a_{rk} = \sum_{k=1}^{n} d_{kk}$$

D'où $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Soit P une matrice inversible telle que $A = PDP^{-1}$, donc $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(PDP^{-1}) = \operatorname{tr}(DP^{-1}P) = \operatorname{tr}(D) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

4. Il est clair que $\operatorname{tr}(A_n) = \sum_{h=1}^{n} \zeta_n^{(h-1)^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_n^{k^2} = G_n$.

Posons $A_n^2 = (\alpha_{rs})_{1\leq r,s\leq n}$, le coefficient d'indice (r,s) de la matrice A_n est :

$$\begin{aligned}
\alpha_{rs} &= \sum_{k=1}^{n} \zeta_n^{(r-1)(k-1)} \zeta_n^{(k-1)(s-1)} && (17)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \zeta_n^{(k-1)(r+s-2)} && (18)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\zeta_n^{(r+s-2)}\right)^k && (19)\\
&= \begin{cases} n & \text{si } r+s=2 \text{ ou } r+s=n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} && (20)
\end{aligned}$$

D'où $A_n^2 = n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = nB_n$.

On voit bien que $B_n^2 = I_n$.

5. Soit λ une valeur propre de A_n, alors il existe un vecteur x non nul tel que $Ax = \lambda x$ et donc

$$A^2x = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda^2 x,$$

ce qui montre que λ^2 est une valeur propre de A^2.

Soit λ une valeur propre de A_n, donc λ^4 est une valeur propre de $A_n^4 = (nB_n)^2 = n^2 I_n$ et par conséquent $\lambda^4 = n^2$ (1 est l'unique valeur propre de I_n), d'où $\lambda \in \left\{ \sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n} \right\}$.

6. Soit $x \in \ker(u - id) \cap \ker(u + id)$, alors $u(x) = x = -x$, donc $x = 0$ et donc $\ker(u - id) \cap \ker(u + id) = \{0\}$. Si $y \in \operatorname{Im}(u + id)$, alors il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $y = (u + id)(x)$ et donc $u(y) - y = u^2(x) + u(x) - u(x) - x = 0$, d'où $\operatorname{Im}(u + id) \subset \ker(u - id)$.

L'inclusion précédente montre que, en utilisant le théorème du rang, $\dim\ker(u + id) + \dim\ker(u - id) = n$ et comme les deux sous-espaces sont en somme directe, alors ils sont supplémentaires, d'où :

$$\mathbb{C}^n = \ker(u - id) \oplus \ker(u + id).$$

Dans une base adaptée à la décomposition précédente la matrice de u est diagonale, donc u et par conséquent la matrice U est diagonalisable.

7. On a $B_n^2 = I_n$, donc B_n est diagonalisable et $\operatorname{Sp}(B_n) \subset \{-1, 1\}$. Montrons que $\operatorname{Sp}(B_n) = \{-1, 1\}$.

Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_{2p+1})$ un vecteur de $\mathbf{C}^n$ tel que $B_n x = x$, alors

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= x_1 \\ x_n &= x_2 \\ x_{n-1} &= x_3 \\ &\vdots \\ x_3 &= x_{n-1} \\ x_2 &= x_n \end{aligned} \right.$$

ceci est équivalent à

$$\begin{cases} x_{2p+1} &= x_2 \\ x_{2p} &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{p+3} &= x_p \\ x_{p+2} &= x_{p+1} \end{cases}$$

Le système admet au moins une solution non nulle, ce qui montre que 1 est une valeur propre de B_n et que le sous-espace propre vaut

$$E_1(B_n) = \text{Vect}(e_1, e_2 + e_{2p+1}, e_3 + e_{2p}, ..., e_{p+1} + e_{p+2}).$$

Soit maintenant $x = (x_1, x_2, ..., x_{2p+1})$ un vecteur de$\mathbf{C}^n$ tel que $B_n = -x$, alors

$$\begin{cases} x_1 &= -x_1 \\ x_n &= -x_2 \\ x_{n-1} &= -x_3 \\ &\vdots \\ x_3 &= -x_{n-1} \\ x_2 &= -x_n \end{cases}$$

ceci est équivalent à

$$\begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_{2p+1} &= -x_2 \\ x_{2p} &= -x_3 \\ &\vdots \\ x_{p+3} &= -x_p \\ x_{p+2} &= -x_{p+1} \end{cases}$$

Le système admet au moins une solution non nulle, ce qui montre que -1 est une valeur propre de B_n et que le sous-espace propre vaut

$$E_{-1}(B_n) = \text{Vect}(e_2 - e_{2p+1}, e_3 - e_{2p}, ..., e_{p+1} - e_{p+2}).$$

La réunion de deux bases de $E_1(B_n)$ et $E_{-1}(B_n)$ forme une base de vecteurs de $\mathbf{C}^n$ dans laquelle B_n est diagonale.

8. On suppose que $P(X) = (X - \lambda_1)...(X - \lambda_d)$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_d \in \mathbf{C}$ deux à deux distincts. La décomposition en éléments simples de la fraction $\dfrac{1}{P(X)}$ donne :

$$\frac{1}{P(X)} = \frac{a_1}{X - \lambda_1} + ... + \frac{a_r}{X - \lambda_d}$$

où $a_i\mathbf{C}$ pour tout $1 \leq i \leq d$. On multiplie par $P(X)$ des deux côtés :

$$1 = \frac{a_1 P(X)}{X - \lambda_1} + ... + \frac{a_d P(X)}{X - \lambda_d}$$

On définit les polynômes :

$$Q_i(X) = \frac{P(X)}{X - \lambda_i} = \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)$$

Donc

$$1 = a_1 Q_1(X) + ... + a_d Q_d(X).$$

Si on applique cette égalité à l'endomorphisme u, on trouve :

$$id = a_1 Q_1(u) + ... + a_d Q_d(u).$$

Soit un vecteur $x \in \mathbf{C}^n$. On a :

$$x = a_1 Q_1(u)(x) + \dots + a_d Q_d(u)(x). (2)$$

Or, pour tout $1 \leq i \leq d$, $Q_i(u)(x) \in \ker(u - \lambda_i id)$. En effet,

$$(u - \lambda_i id)(Q_i(u)(x)) = P(u)(x) = 0.$$

Par conséquent, l'égalité (2) implique que $x \in \ker(u - \lambda_1 id) + \dots + \ker(u - \lambda_d id)$. Ceci étant vrai quel que soit $x \in \mathbf{C}^n$, alors

$$\mathbf{C}^n = \ker(u - \lambda_1 id) + \dots + \ker(u - \lambda_d id).$$

Mais, d'autre part, les valeurs propres étant distinctes, les sous-espaces propres sont en somme directe. En conclusion $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_d\}$ et :

$$\mathbb{C}^n = \ker(u - \lambda_1 id) \oplus \dots \oplus \ker(u - \lambda_d id) = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \ker(u - \lambda Id)$$

C'est exactement dire que u est diagonalisable.

9.

$$\begin{aligned}
G_n^{r+1} - G_n^r &= \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_n^{(r+k+1)^2} - \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_n^{(r+k)^2} && (21)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \zeta_n^{(r+k)^2} - \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_n^{(r+k)^2} && (22)\\
&= \zeta_n^{(r+n)^2} - \zeta_n^{r^2} && (23)\\
&= \zeta_n^{(r^2+2rn+n^2)} - \zeta_n^{r^2} && (24)\\
&= \zeta_n^{r^2} - \zeta_n^{r^2} = 0. && (25)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall r \in \mathbb{Z}$, $\sum_{s=0}^{n-1} \zeta_n^{(r+s)^2} = \sum_{s=0}^{n-1} \zeta_n^{s^2}$ et par conséquent :

$$\begin{aligned}
G_n \overline{G_n} &= \left(\sum_{s=0}^{n-1} \zeta_n^{s^2}\right)\left(\sum_{r=0}^{n-1} \zeta_n^{-r^2}\right) && (26)\\
&= \sum_{r=0}^{n-1} \zeta_n^{-r^2} \left(\sum_{s=0}^{n-1} \zeta_n^{s^2}\right) && (27)\\
&= \sum_{r=0}^{n-1} \zeta_n^{-r^2} \left(\sum_{s=0}^{n-1} \zeta_n^{(r+s)^2}\right) && (28)\\
&= \sum_{r=0}^{n-1} \left(\sum_{s=0}^{n-1} \zeta_n^{(r+s)^2 - r^2}\right) && (29)
\end{aligned}$$

$$|G_n|^2 = \sum_{r=0}^{n-1} \left(\sum_{s=0}^{n-1} \zeta_n^{(r+s)^2 - r^2}\right) = \sum_{r=0}^{n-1} \left(\sum_{s=0}^{n-1} \zeta_n^{s(s+2r)}\right) = \sum_{s=0}^{n-1} \zeta_n^{s^2} \sum_{r=0}^{n-1} \zeta_n^{2rs}.$$

La somme interne n'est non nulle seulement si $2s \equiv 0 \pmod{n}$. Ainsi, si n est impair de la forme $2p+1$, alors $2s \equiv 0 (\mathrm{mod}\ \ 2p+1)$, donc $s = 0$. D'où $|G_n|^2 = \zeta_n^{0^2} \sum_{r=0}^{n-1} \zeta_n^0 = n$ et donc $|G_n| = \sqrt{n}$.

10. La matrice A_n vérifie $A_n^4 - n^2 I_n = 0$ et qu'elle est donc diagonalisable de valeurs propres sont $\sqrt{n}$ $-\sqrt{n}$, $i\sqrt{n}$, $-i\sqrt{n}$.

Soit $U_n = \frac{1}{\sqrt{n}} A_n$, on a $U_n^2 = \frac{1}{n} A_n^2 = B_n$. Donc $\mathrm{tr}(U_n^2) = \mathrm{tr}(B_n) = 1$ et comme B_n est semblable à

$$\begin{pmatrix} I_{a+b} & (0) \\ (0) & -I_{c+d} \end{pmatrix}.$$

Donc $\operatorname{tr}(B_n) = (a+b)\times 1 + (c+d)\times(-1) = 1$ et on a bien sûr $a+b+c+d = n$ (la taille de la matrice), donc $2(a+b) = n+1 = 2(p+1)$ et $2(c+d) = n-1 = 2p$. D'autre part, $\operatorname{tr}(U_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{tr}(A_n) = (a-b)+i(c-d)$.
Mais $\operatorname{tr}(U_n) = \frac{G_n}{\sqrt{n}}$, donc $|\operatorname{tr}(U_n)| = \frac{|G_n|}{\sqrt{n}} = 1$ et par conséquent $(a-b)^2+(c-d)^2 = 1$.
Puisque le déterminant d'une matrice est le produit de ses valeurs propres, on a alors :

$$\det(A_n) = (\sqrt{n})^a(-\sqrt{n})^b(i\sqrt{n})^c(-i\sqrt{n})^d$$

ou encore

$$i^{2b+c+3d}n^{\frac{n}{2}} = i^{p(2p+1)}n^{\frac{n}{2}}.$$

En comparant cela avec l'expression précédente du déterminant et en notant que $3 \equiv -1 \pmod n$, nous obtenons les conditions :

$$2b+c-d \equiv p(2p+1) \pmod 4$$

quand n est impair. Nous utiliserons cette congruence pour déterminer a, b, c, d comme suit :
D'abord la congruence précédent s'écrit aussi :

$$2(b+d)+c+d \equiv p(2p+1) \pmod 4$$

ou encore

$$b+d \equiv p^2 \pmod 2$$

Ainsi, si p est pair $b+d$ est pair et si p est impair $b+d$ est impair.
Supposons n impair et $n \equiv 1 \pmod 4$. Par la question , on sait que $a-b = \pm 1$ et $c-d = 0$. Ainsi 5 et 6 conduisent à

$$a-b = a+b-2b \equiv \frac{n+1}{2} - \frac{n(n-1)}{2} \pmod 4 = \frac{n+1-n+1}{2} \pmod 4 \equiv 1 \pmod 4$$

donc $a-b = 1$, ce qui prouve que $G_n = \sqrt{n}$ quand $n \equiv 1 \pmod 4$.
Maintenant, supposons $n \equiv 3 \pmod 4$. l'égalité 1 nous dit que $a = b$ et $c-d = \pm 1$ donc 2 et 5 donnent

$$\begin{aligned} c-d &\equiv \frac{n(n-1)}{2} - 2b \pmod 4 && (30)\\ &\equiv \frac{3(n-1)}{2} - \frac{n+1}{2} \pmod 4 && (31)\\ &\equiv \frac{3n-3n-n-1}{2} \pmod 4 && (32)\\ &\equiv \frac{2n-4}{2} \pmod 4 && (33)\\ &\equiv 1 \pmod 4 && (34) \end{aligned}$$

donc, $n \equiv 3 \pmod 4$, on en déduit que $G_n = \operatorname{tr}(A_n) = i\sqrt{n}$.

-II-

1. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $K \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=-K}^{K} e^{-2i\pi kt} &= 1 + \sum_{k=1}^{K}\left(e^{-2i\pi kt} + e^{2i\pi kt}\right) \\ &= 1 + 2\sum_{k=1}^{K}\cos(2kx), \text{ avec } x = \pi t \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\sin x + \sum_{k=1}^{K} 2\sin x \cos 2kx &= \sin x + \sum_{k=1}^{K} (\sin(2k+1)x - \sin(2k-1)x) \\ &= \sin x + (\sin(2K+1)x - \sin x) = \sin(2K+1)x.\end{aligned}$$

Ainsi, si $x \in]0, \pi[$ alors $\sin x \neq 0$ et donc :

$$1 + 2\sum_{k=1}^{K} \cos 2kx = \frac{\sin(2K+1)x}{\sin x}.$$

D'où, pour $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=-K}^{K} e^{-2i\pi kt} = \frac{\sin(2K+1)\pi t}{\sin \pi t}.$$

Si $t \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\sum_{k=-K}^{K} e^{-2i\pi kt} = 2K+1.$

D'après l'égalité précédente,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(2K+1)\pi t}{\sin \pi t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} + 2\sum_{k=1}^{K} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2k\pi t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Le changement de variable $t = 1-u$, montre que $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\sin(2K+1)\pi t}{\sin \pi t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$

2. La propriété est claire si $g = 1$, puisque :

$$\left|\int_a^b \sin(mx)\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{\cos(ma) - \cos(mb)}{m}\right| \leq \frac{2}{m}.$$

Donc, par linéarité et la relation de Chasles, la propriété est vraie pour toutes les fonctions en escalier sur $[a, b]$. Soit maintenant, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ en escalier sur $[a, b]$ tel que

$$\|g - \varphi\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |g(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

On a alors, pour tout réel $m > 0$:

$$\left|\int_a^b (g-\varphi)(x)\sin(mx)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |g(x) - \varphi(x)|\, dt \leq (b-a)\varepsilon,$$

d'autre part, il existe $m_0 > 0$ tel que $\forall m \geq m_0$ on a :

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\sin(mx)\mathrm{d}x\right| \leq \varepsilon.$$

On obtient ainsi, $\forall m \geq m_0$,

$$\left|\int_a^b g(x)\sin(mx)\right| \leq \left|\int_a^b (g(x) - \varphi(x))\sin(mx)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^b \varphi(x)\sin(mx)\mathrm{d}x\right| \leq (1 + (b-a))\varepsilon$$

ce qui preuve que

$$\lim_{m \to +\infty} \int_a^b g(x)\sin(mx)\mathrm{d}x = 0.$$

3. D'après la première question de cette partie, $\displaystyle\sum_{k=-K}^{K} e^{-2i\pi kt} = \frac{\sin(2K+1)\pi t}{\sin(\pi t)}$, d'où :

$$S_K = \sum_{k=-K}^{K} \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi kt}\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t) \sum_{k=-K}^{K} e^{-2i\pi kt}\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\frac{\sin(2K+1)\pi t}{\sin(\pi t)}\mathrm{d}t.$$

Il est clair que g_1 est bien définie et continue sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, de plus on a :

$$\lim_{t\to 0} g_1(t) = \frac{1}{\pi}\lim_{t\to 0} \frac{f(t)-f(0)}{t}\frac{\pi t}{\sin \pi t} = \frac{f'(0)}{\pi}.$$

Donc la fonction g_1 se prolonge par continuité en 0. De même, g_2 est bien définie et continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ et on a :

$$\lim_{t\to 1} g_2(t) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t)-f(1)}{t-1}\frac{t-1}{\sin \pi t} = f'(1)\times(-1) = -f'(1).$$

Donc la fonction g_2 se prolonge par continuité en 1.
Avec les fonctions g_1 et g_2 et la relation de Chasles, le terme S_K s'écrit donc :

$$\begin{aligned} S_k &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\frac{\sin(2K+1)\pi t}{\sin(\pi t)}\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\frac{\sin(2K+1)\pi t}{\sin(\pi t)}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)-f(0)}{\sin(\pi t)}\sin(2K+1)\pi t\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)-f(1)}{\sin(\pi t)}\sin(2K+1)\pi t\mathrm{d}t + \\ &\quad f(0)\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(2K+1)\pi t}{\sin(\pi t)}\mathrm{d}t + f(1)\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sin(2K+1)\pi t}{\sin(\pi t)}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} g_1(t)\sin(2K+1)\pi t\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 g_2(t)\sin(2K+1)\pi t\mathrm{d}t + \\ &\quad f(0)\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(2K+1)\pi t}{\sin(\pi t)}\mathrm{d}t + f(1)\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sin(2K+1)\pi t}{\sin(\pi t)}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

En utilisant les questions **1.** et **2.**, on obtient $\displaystyle\lim_{K\to\infty} S_K = \frac{f(0)+f(1)}{2}$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $K \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=-K}^{K} \int_0^n f(t)e^{-2i\pi kt}\mathrm{d}t &= \sum_{k=-K}^{K}\sum_{r=0}^{n-1} \int_r^{r+1} f(t)e^{-2i\pi kt}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{k=-K}^{K} \int_r^{r+1} f(t)e^{-2i\pi kt}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{k=-K}^{K} \int_r^{r+1} f(t)e^{-2i\pi kt}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{k=-K}^{K} \int_0^1 f(u+r)e^{-2i\pi k(u+r)}\mathrm{d}u, \quad u = t-r \\ &= \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{k=-K}^{K} \int_0^1 f(u+r)e^{-2i\pi ku}\mathrm{d}u \end{aligned}$$

D'après la question précédente, $\lim_{K\to\infty}\left(\sum_{k=-K}^{K}\int_0^1 f(u-r)e^{-2i\pi ku}\mathrm{d}u\right)=\frac{f(r)+f(r+1)}{2}$. Par conséquent,

$$\lim_{K\to\infty}\left(\sum_{k=-K}^{K}\int_0^n f(t)e^{-2i\pi kt}\mathrm{d}t\right)=\sum_{r=0}^{n-1}\frac{f(r)+f(r+1)}{2}=\frac{f(0)}{2}+f(1)+\ldots+f(n-1)+\frac{f(n)}{2}.$$

-III-

1. On a $\left|\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\right|\leq\frac{1}{\sqrt{x}}$ et $\int_0^1\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ converge. Pour $x\geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}\int_1^a\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= \left[\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right]_1^a-\int_1^a\frac{\sin x}{2x\sqrt{x}}\\ &= \frac{\sin a}{\sqrt{a}}-\int_1^a\frac{\sin x}{2x\sqrt{x}}\end{aligned}$$

Comme $\left|\frac{\sin x}{2x\sqrt{x}}\right|\leq\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ pour tout $x\geq 1$ et la fonction $x\mapsto\frac{\sin x}{2x\sqrt{x}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, alors $\lim_{a\to\infty}\int_1^a\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ existe et vaut $1-\int_1^{+\infty}\frac{\sin}{2x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$. Ainsi, par la relation de Chasles, $\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ converge.
En effectuant le changement de variable $x^2=t$, il vient

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

L'étude précédente montre donc que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x$ converge.
De même, en effectuant le changement de variable $x^2=t$, il vient

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

Comme précédemment on peut montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ est convergente ce qui entraine la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\gamma_n &= \int_0^{+\infty}e^{2i\pi x^2}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty}\cos 2\pi x^2\mathrm{d}x+i\int_0^{+\infty}\sin 2\pi x^2\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(\int_0^{+\infty}\cos t^2\mathrm{d}t+i\int_0^{+\infty}\sin t^2\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{\alpha+i\beta}{\sqrt{2\pi n}}\end{aligned}$$

2. Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, on a $x^2-kx=\left(x-\frac{k}{2}\right)^2-\left(\frac{k}{2}\right)^2$, donc

$$\int_0^1 e^{2i\pi n(x^2-kx)}\mathrm{d}x=e^{\frac{-i\pi nk^2}{2}}\int_0^1 e^{2in\pi\left(x-\frac{k}{2}\right)^2}\mathrm{d}x.$$

Avec le changement de variable $u = \dfrac{k}{2} - x$, et en posant $\varepsilon_k(n) = e^{\frac{-i\pi n k^2}{2}}$, on obtient :

$$\int_0^1 e^{2i\pi n(x^2-kx)}\mathrm{d}x = \varepsilon_k(n)\int_{\frac{k}{2}-1}^{\frac{k}{2}} e^{2i\pi n u^2}\mathrm{d}u$$

Si k est pair de la forme $2l$, alors $\varepsilon_k(n) = e^{-2i\pi n l^2} = 1$. Si k est impair de la forme $2l+1$, alors

$$\varepsilon_k(n) = e^{\frac{-i\pi n}{2}(4l^2+4l+1)} = e^{-2in\pi(l^2+l)}e^{\frac{-i\pi n}{2}} = (-i)^n.$$

D'où :

$$\varepsilon_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ (-i)^n & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

On pose $T_K = \displaystyle\sum_{k=-K}^{K}\int_0^1 e^{2i\pi n(x^2-kx)\mathrm{d}x}$, pour $K \in \mathbb{N}$. Montrons que les deux suites extraites $(T_{2K})_{K\in\mathbb{N}}$ et $(T_{2K+1})_{K\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et de même limite, pour conclure que la suite T_K converge. En effet,

$$\begin{aligned}
T_{2K} &= \sum_{k=-2K}^{2K}\int_0^1 e^{2i\pi n(x^2-kx)}\mathrm{d}x = \sum_{k=-2K}^{2K}\varepsilon_k(n)\int_{\frac{k}{2}-1}^{\frac{k}{2}} e^{2i\pi n u^2}\mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=-2K, k \text{ pair}}^{2K}\varepsilon_k(n)\int_{\frac{k}{2}-1}^{\frac{k}{2}} e^{2i\pi n u^2}\mathrm{d}u + \sum_{k=-2K, k \text{ impair}}^{2K}\varepsilon_k(n)\int_{\frac{k}{2}-1}^{\frac{k}{2}} e^{2i\pi n u^2}\mathrm{d}u \\
&= \sum_{s=-K}^{K}\int_{s-1}^{s} e^{2i\pi n u^2}\mathrm{d}u + (-i)^n\sum_{s=-K}^{K-1}\int_{s-\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}} e^{2i\pi n u^2}\mathrm{d}u \\
&= \int_{-K-1}^{K} e^{2i\pi n u^2}\mathrm{d}u + (-i)^n\int_{-K-\frac{1}{2}}^{K-\frac{1}{2}} e^{2i\pi n u^2}\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\lim_{K\to\infty} T_{2K} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi n u^2}\mathrm{d}u + (-i)^n\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi n u^2}\mathrm{d}u = 2(1+(-i)^n)\gamma_n = \frac{2(1+(i)^n)}{\sqrt{2\pi n}}(\alpha+i\beta)$. De même, on obtient :

$$\begin{aligned}
T_{2K+1} &= \sum_{k=-2K-1}^{2K+1}\int_0^1 e^{2i\pi n(x^2-kx)}\mathrm{d}x = \sum_{k=-2K-1}^{2K+1}\varepsilon_k(n)\int_{\frac{k}{2}-1}^{\frac{k}{2}} e^{2i\pi n u^2}\mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=-2K-1, k \text{ pair}}^{2K+1}\varepsilon_k(n)\int_{\frac{k}{2}-1}^{\frac{k}{2}} e^{2i\pi n u^2}\mathrm{d}u + \sum_{k=-2K-1, k \text{ impair}}^{2K+1}\varepsilon_k(n)\int_{\frac{k}{2}-1}^{\frac{k}{2}} e^{2i\pi n u^2}\mathrm{d}u \\
&= \sum_{s=-K}^{K}\int_{s-1}^{s} e^{2i\pi n u^2}\mathrm{d}u + (-i)^n\sum_{s=-K-1}^{K}\int_{s-\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}} e^{2i\pi n u^2}\mathrm{d}u \\
&= \int_{-K-1}^{K} e^{2i\pi n u^2}\mathrm{d}u + (-i)^n\int_{-K-\frac{3}{2}}^{K+\frac{1}{2}} e^{2i\pi n u^2}\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\lim_{K\to+\infty} T_{2K+1} = \lim_{K\to+\infty} T_{2K} = \frac{2(1+(i)^n)}{\sqrt{2\pi n}}(\alpha+i\beta)$ et par conséquent

$$\lim_{K\to+\infty}\left(\sum_{k=-K}^{K}\int_0^1 e^{2i\pi n(x^2-kx)\mathrm{d}x}\right) = \frac{2(1+(i)^n)}{\sqrt{2\pi n}}(\alpha+i\beta).$$

3. Si $f(t)=e^{\frac{2i\pi t^2}{n}}$, alors $\lim\limits_{K\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=-K}^{K}\int_0^n f(t)e^{-2i\pi kt}\mathrm{d}t\right)=\dfrac{f(0)+f(n)}{2}+\sum\limits_{l=1}^{n-1}e^{\frac{2i\pi l^2}{n}}=G_n$.
Mais, en effectuant le changement de variable $t=nx$, on obtient

$$\int_0^n f(t)e^{-2i\pi kt}\mathrm{d}t=\int_0^1 f(nx)e^{-2i\pi knx}n\mathrm{d}x=n\int_0^1 e^{2i\pi n(x^2-kx)}\mathrm{d}x.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\lim_{K\to+\infty}\sum_{k=-K}^{K}\int_0^n f(t)e^{-2i\pi kt}\mathrm{d}t &= n\lim_{K\to+\infty}\sum_{k=-K}^{K}\int_0^1 e^{2i\pi n(x^2-kx)}\mathrm{d}x\\ &= \frac{2\sqrt{n}(1+(-i)^n)}{\sqrt{2\pi}}\left(\alpha+i\beta\right).\end{aligned}$$

D'où, par unicité de la limité :

$$G_n=\frac{2\sqrt{n}(1+(-i)^n)}{\sqrt{2\pi}}\left(\alpha+i\beta\right).$$

D'après le résultat trouvé dans la première partie $G_n=\sqrt{n}$ si $n=4l+1$ ($l\in\mathbb{N}$). Par exemple, si $n=1$ on obtient l'égalité :

$$1=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}(1-i)(\alpha+i\beta)$$

ce qui donne :

$$\alpha=\beta=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$